Soluție

1. a) Se verifică prin calcul.

b) $\det\left(A-A^t\right)=\det\left(\left(A-A^t\right)^t\right)=\det\left(A^t-A\right)=-\det\left(A-A^t\right)$ deci $\det\left(A-A^t\right)=0$.

c) Minorul $\begin{vmatrix} b & b+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ este nenul.

2. a) Pentru orice $x\in[0,\infty)$, avem $f(x)=x^3+p\cdot x^2+q\cdot x+r>0$.

b) $S_1=x_1+x_2+x_3=-p$, $S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q$.

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p\cdot\left(S_1^2-2S_2\right)-q\cdot S_1-3r=-p^3+3pq-3r$.

c) Fie polinomul $g\in\mathbb{R}[X]$, $g=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$, cu rădăcinile a,b,c.
Deoarece $p=-(a+b+c)>0$, $q=ab+bc+ca>0$ și $r=-abc>0$, din punctul a) rezultă că rădăcinile a,b,c ale lui g nu sunt în intervalul $[0,\infty)$. Așadar, $a,b,c\in(-\infty,0)$.